АСТРОНОМИЯ
ВСЕРОССИЙСКАЯ
ОЛИМПИАДА
ШКОЛЬНИКОВ

Критерии оценивания
заданий
муниципального этапа
2026-2027 учебный год
11 класс

Задание 1.

Наблюдение Веги в Краснодаре

Наблюдатель находится в Краснодаре (φ = 45,04° с.ш.). Звезда Вега (α =18ч 36м, δ = +38°47′) в некоторый момент наблюдалась на высоте h = 60° к югу от зенита. Азимут отсчитывается от точки юга к западу.

Общий балл за задачу – 16.

1. Определите зенитное расстояние Веги. **(1 балл)**
2. Найдите часовой угол Веги. **(5 баллов)**
3. Вычислите азимут Веги. **(4 балла)**
4. Является ли Вега незаходящей звездой для Краснодара? Ответ обоснуйте. **(3 балла)**
5. Определите высоту Веги в верхней кульминации. **(3 балла)**

Решение

1. Определите зенитное расстояние Веги.

$$z = 90° - h = 30°$$

Критерии:

Максимальный балл – 1.

2. Найдите часовой угол Веги.

Т.к. не задано местное звездное время, часовой угол считается из формулы сферической тригонометрии

$$\sin h = \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos H.$$

$$\cos H = \frac{\sin h - \sin\varphi \sin\delta}{\cos\varphi \cos\delta}.$$

$$\varphi = 45{,}04^\circ,\ \delta = 38{,}78^\circ,\ h = 60^\circ.$$

$$\sin h = 0{,}8660, \quad \sin\varphi = 0{,}7075, \quad \sin\delta = 0{,}6266,$$

$$\cos\varphi = 0{,}7068, \quad \cos\delta = 0{,}7793.$$

$$\cos H = \frac{0{,}8660 - 0{,}7075 \cdot 0{,}6266}{0{,}7068 \cdot 0{,}7793} \approx 0{,}767.$$

$$H \approx \arccos(0{,}767) \approx 39{,}9^\circ \approx 40^\circ.$$

Т.к. звезда к югу от зенита и не указано, до или после кульминации, часовой угол может быть ±40°.

Критерии:

Максимальный балл – 5

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет часового угла – 2 балла.

Утверждение, что часовой угол может быть ±40° – 1 балл.

3. Вычислите азимут Веги.

По условию азимут отсчитывается от юга к западу, угол при зените равен A (а не $180°-A$). Тогда теорема косинусов даёт:

$$\sin\delta = \sin\varphi\sin h + \cos\varphi\cos h\cos A,$$

$$\cos A = \frac{\sin\delta - \sin\varphi\sin h}{\cos\varphi\cos h}.$$

$$\cos A = \frac{0{,}6266 - 0{,}7075\cdot 0{,}8660}{0{,}7068\cdot 0{,}5} \approx 0{,}0393.$$

$$A \approx \arccos(0{,}0393) \approx 87{,}7^\circ.$$

Т.к. азимут отсчитывается от юга к западу, а звезда находится к югу от зенита, азимут равен 87,7° (почти запад).

Критерии:

Максимальный балл – 4

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет азимута – 2 балла.

4. Является ли Вега незаходящей звездой для Краснодара? Ответ обоснуйте.

Для того, чтобы звезда была незаходящей должны выполняться два условия:

а) φ, δ одного знака;

б) $|\varphi| + |\delta| > 90°$.

$$\varphi + \delta = 45{,}04° + 38{,}78° = 83{,}82° < 90°$$

Звезда заходит за горизонт.

Критерии:

Максимальный балл – 3

Запись условий – 1 балл.

Вычисления – 1 балл.

Вывод: Вега не является заходящей звездой для Краснодара – 1 балл.

5. Определите высоту Веги в верхней кульминации.

Используем формулу для верхней кульминации (случай δ<φ)

$$h = 90° - \varphi + \delta = 83{,}74°$$

Критерии:

Максимальный балл – 3

Запись формулы – 2 балла.

Вычисления – 1 балл.

Задание 2.

Законы Кеплера и космический перелёт

Космический аппарат совершает перелёт с Земли на Марс по гомановской траектории. Орбиты планет считать круговыми, лежащими в одной плоскости. Радиус орбиты Земли 1 а.е., Марса 1,5 а.е. Солнце находится в центре орбит. Движение аппарата происходит в ту же сторону, что и движение планет.

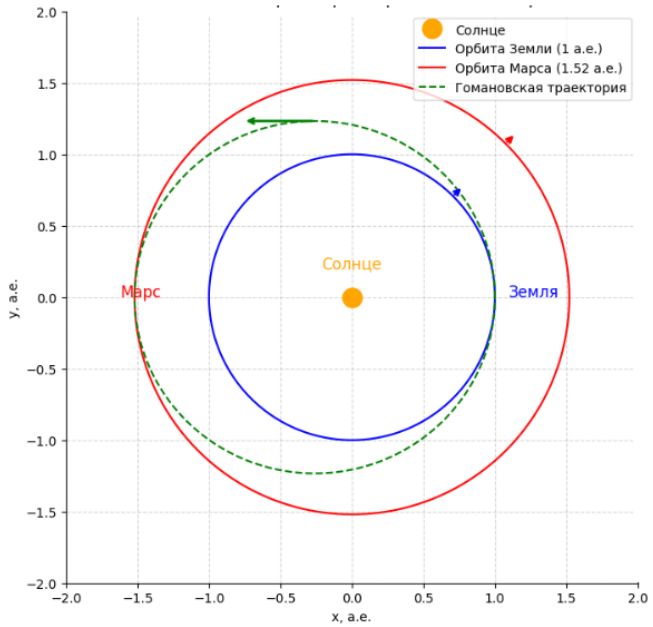
Общий балл за задачу – 16.

1. Нарисуйте рисунок к задаче. Определите большую полуось гомановской траектории. **(3 балла)**
2. Найдите период обращения аппарата по этой траектории. **(4 балла)**
3. Определите время движения космического аппарата по гомановской траектории от орбиты Земли до орбиты Марса. Считайте, что старт происходит в момент, когда Земля находится в перигелии этой траектории, а Марс – в афелии. **(4 балла)**
4. Какой должна быть скорость аппарата относительно Земли после выхода из её сферы действия (т.е. на «бесконечности»), чтобы он вышел на данную гомановскую траекторию? Учтите, что Земля уже движется вокруг Солнца со скоростью 29,8 км/с. **(5 баллов)**

Решение

1. Нарисуйте рисунок к задаче. Определите большую полуось гомановской траектории.

Гомановская траектория – эллипс, у которого перигелий совпадает с орбитой Земли, а афелий – с орбитой Марса. Поэтому большая полуось (a) равна полусумме радиусов орбит:



$$a = \frac{r_З + r_М}{2} = \frac{1 + 1{,}52}{2} = 1{,}26 \text{ а.е.}$$

Критерии:
Максимальный балл – 3 б.
Правильный рисунок – 2 б.
Вычисление значения большой полуоси гомановской траектории – 1 б.

2. Найдите период обращения аппарата по этой траектории.

По третьему закону Кеплера, т.к. расстояние в а.е., а период в годах:

$$T^2 = a^3$$

$$T = a^{3/2} \approx 1{,}414 \text{ лет}$$

Критерии:
Максимальный балл – 4
Запись исходной формулы – 2 б.
Верный расчет периода обращения аппарата – 2 б.

3. Определите время движения космического аппарата по гомановской траектории от орбиты Земли до орбиты Марса в сутках. Считайте, что старт происходит в момент, когда Земля находится в перигелии этой траектории, а Марс – в афелии.

Перелёт занимает половину полного оборота по эллипсу:

$$t = \frac{T}{2} \approx \frac{1{,}414}{2} = 0{,}707 \text{ лет}$$

$$0{,}707 \cdot 365{,}25 \approx 258 \text{ сут}$$

Критерии:
Максимальный балл – 4
Запись исходной формулы – 2 б.
Верный расчет времени перелета в сут. – 2 б.
Если расчет выполнен в годах – снимается 1 б.

4. Какой должна быть скорость аппарата относительно Земли после выхода из её сферы действия (т.е. на «бесконечности»), чтобы он вышел на данную гомановскую траекторию? Учтите, что Земля уже движется вокруг Солнца со скоростью 29,8 км/с.

Для эллиптической орбиты скорость в точке с расстоянием r от центрального тела определяется формулой:

$$v = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right)},$$

где r – радиус низкой орбиты, a – большая полуось гомановской орбиты. В перигелии $r = r_З = 1$ а.е. Поэтому:

$$v_{\text{п}} = \sqrt{GM\left(\frac{2}{r_{\text{З}}} - \frac{1}{a}\right)}.$$

$$v_{\text{п}} = \sqrt{1070{,}3} \approx 32{,}72 \text{ км/с}.$$

Аппарат стартует с орбиты Земли. Земля уже движется вокруг Солнца со скоростью 29,8 км/с. Чтобы выйти на гомановскую траекторию, аппарату нужно иметь гелиоцентрическую скорость $\upsilon_{\text{п}}$ в перигелии. Относительно Земли это соответствует скорости υ_{∞}, которая находится из закона сохранения энергии:

$$v_{\infty} = \sqrt{v_{\text{п}}^2 - v_{\text{З}}^2} \approx 13{,}51 \text{ км/с}.$$

Критерии:
Максимальный балл – 5
Запись формулы скорости в перигее переходной орбиты – 2 б.
Запись формулы скорости аппарата на «бесконечности» – 2 б.
Верный расчет величины скорости υ_{∞} – 1 б.

Задание 3.

Телескопы

Имеются два телескопа:

Рефрактор с диаметром объектива D_1 = 100 мм и фокусным расстоянием F_1=1000 мм.

Рефлектор с диаметром объектива D_2 = 200 мм и фокусным расстоянием F_2=1200 мм.

Имеются окуляры с фокусными расстояниями f =10 мм и F =25 мм. Длина волны света λ = 550 нм.

Общий балл за задачу – 16.

1. Определите увеличение каждого телескопа с каждым окуляром. **(4 балла)**
2. Рассчитайте разрешающую способность (дифракционный предел) каждого телескопа. **(4 балла)**
3. Оцените проницающую силу каждого телескопа по формуле m=6+5lg$D$ (где D в мм). **(2 балла)**
4. Какой телескоп с каким окуляром даст максимальное увеличение? Можно ли с его помощью разрешить двойную звезду с угловым расстоянием 0,5″? Ответ обоснуйте. **(6 баллов)**

Решение

1. **Определите увеличение каждого телескопа с каждым окуляро**м

   Формула: $\Gamma = F/f$.

Для рефрактора ($F_1 = 1000$ мм):

с $f = 10$ мм: $\Gamma = 1000/10 = 100^{\text{x}}$;

с $f = 25$ мм: $\Gamma = 1000/25 = 40^{\text{x}}$.

Для рефлектора ($F_2 = 1200$ мм):

с $f = 10$ мм: $\Gamma = 1200/10 = 120^{\text{x}}$;

с $f = 25$ мм: $\Gamma = 1200/25 = 48^{\text{x}}$.

Критерии:

Максимальный балл – 4

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет для рефрактора – 1 балл.

Верный расчет для рефлектора – 1 балл.

2. Рассчитайте разрешающую способность (дифракционный предел) каждого телескопа.

Исходная формула: $\theta = 1{,}22\lambda/D$

$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м

Для $D_1 = 100$ мм $= 0{,}1$ м:

$$\theta_1 = \frac{1{,}22 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{0{,}1} \approx 6{,}71 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

$1 \text{ рад} = 206265''$. $\quad \theta_1 \approx 1{,}38''$

Для $D_2 = 200$ мм $= 0{,}2$ м:

$$\theta_2 = \frac{1{,}22 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{0{,}2} \approx 3{,}36 \cdot 10^{-6} \text{ рад} \approx 0{,}69''.$$

Критерии:

Максимальный балл – 4

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет для телескопов – 2 балла (рефрактор – 1 балл, рефлектор – 1 балл).

3. Оцените проницающую силу каждого телескопа по формуле $m=6+5\lg D$ (где D в мм).

Формула: $m = 6 + 5 \lg D$ (D в мм).

Для $D_1 = 100$ мм:

$$m_1 = 6 + 5 \lg 100 = 6 + 5 \cdot 2 = 16^m.$$

Для $D_2 = 200$ мм:

$$m_2 = 6 + 5 \lg 200 \approx 6 + 5 \cdot 2{,}301 = 17{,}5^m.$$

Критерии:

Максимальный балл – 2

Расчет для рефрактора – 1 балл.

Расчет для рефлектора – 1 балл.

4. Какой телескоп с каким окуляром даст максимальное увеличение? Можно ли с его помощью разрешить двойную звезду с угловым расстоянием 0,5″? Ответ обоснуйте.

Максимальное увеличение даёт рефлектор с окуляром f = 10 мм: Γ=120^x. Его разрешающая способность $\theta_2 \approx 0{,}69''$.

Двойная звезда с угловым расстоянием 0,5″ имеет размер меньше дифракционного предела, поэтому разрешить её нельзя.

Дифракционный предел (критерий Рэлея)

$$\theta = 1{,}22\frac{\lambda}{D},$$

где λ – длина волны света, D – диаметр объектива.

Для того, чтобы разрешить двойную с угловым расстоянием θ_0 = 0,5″, нужно, чтобы выполнялось условие:

$$\theta \leq \theta_0.$$

Тогда должно выполняться:

$$D \geq \frac{1{,}22\lambda}{\theta_0}.$$

$\lambda = 550$ нм $= 5{,}5 \cdot 10^{-7}$ м;

$\theta_0 = 0{,}5''$.

$$\theta_0 = \frac{0{,}5}{206265} \approx 2{,}424 \cdot 10^{-6} \text{ рад.}$$

$$D \geq \frac{1{,}22 \cdot 5{,}5 \cdot 10^{-7}}{2{,}424 \cdot 10^{-6}} \approx \frac{6{,}71 \cdot 10^{-7}}{2{,}424 \cdot 10^{-6}} \approx 0{,}2768 \text{ м} \approx 0{,}27 \text{ м} = 270 \text{ мм}.$$

Поскольку диаметр имеющегося телескопа D = 200 мм < 270 мм, его разрешающая способность хуже, и двойную с угловым расстоянием 0,5″ он разрешить не сможет.

Максимальный балл – 6

Рефлектор с *f = 10* мм даст максимальное увеличение – 1 балл.

Запись условия $\theta \le \theta_0$ – 2 балла

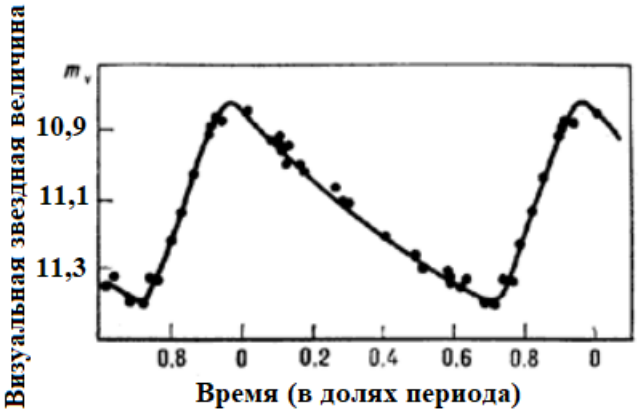
Расчет необходимого диаметра телескопа (270 мм) – 2 балла.

Вывод о невозможности разрешить двойную звезду с угловым расстоянием 0,5″ – 1 балл.

Задание 4.

Цефеида *CF* Кассиопеи

На рисунке представлена кривая блеска цефеиды *CF* Кассиопеи. По оси абсцисс отложено время в долях периода (фаза), отчитываемое от момента максимума. Период $P = 4{,}88$ суток. Ось ординат – видимая звёздная величина m_v.



Общий балл за задачу – 16.

1. По графику определите видимую звёздную величину в максимуме и минимуме блеска. Найдите амплитуду изменения блеска. **(3 балла)**
2. Используя зависимость «период–светимость» для цефеид $M = -1{,}0 - 2{,}5\lg P$ (где P в сутках), найдите абсолютную звёздную величину в максимуме блеска. **(2 балла)**
3. Вычислите расстояние до цефеиды в парсеках. **(4 балла)**
4. Оцените скорость изменения блеска (в звёздных величинах за сутки) на этапе подъёма от минимума к максимуму **(3 балла)**.
5. Оцените радиус звезды в максимуме блеска. Для упрощения принять, что её эффективная температура равна 6000 К. Сравните с радиусом Солнца. Принять $M_\odot = 4{,}8^m$, $T_\odot = 6000$ К. **(4 балла)**

Решение

1. По графику определите видимую звёздную величину в максимуме и минимуме блеска. Найдите амплитуду изменения блеска.

По графику:

Максимум $m_{max} \approx 10{,}8^m$.

Минимум $m_{min} \approx 11{,}4^m$.

Амплитуда $\Delta m = m_{min} - m_{max} \approx 0{,}6^m$

Критерии:

Максимальный балл – 3.

Верно определена m_{max} – 1 б.

Верно определена m_{min} – 1 б.

Верно определена амплитуда – 1 б. (допускается погрешность ±0,1m). Если итоговый ответ укладывается в погрешность, баллы по предыдущим пунктам засчитываются.

2. Используя зависимость «период–светимость» для цефеид $M = -1{,}0-2{,}5lgP$ (где P в сутках), найдите абсолютную звёздную величину в максимуме блеска.

Подставляем $P = 4{,}88$ суток в заданную формулу:

$$M = -1{,}0 - 2{,}5lgP = -2{,}72^{\text{m}}$$

Критерии:

Максимальный балл – 2.

3. Вычислите расстояние до цефеиды в парсеках.

Используем формулу связи видимой и абсолютной величины:

$$m - M = 5lgd - 5.$$

Выражаем расстояние от Земли до звезды d:

$$\lg d = \frac{m - M + 5}{5}.$$

Подставляем значения $m = 10{,}8$, $M = -2{,}7$:

$$m - M = 10{,}8 - (-2{,}7) = 13{,}5.$$

$$\lg d = \frac{13{,}5 + 5}{5} = \frac{18{,}5}{5} = 3{,}7.$$

$$d = 10^{3{,}7} \approx 5012 \text{ пк} \approx 5{,}0 \text{ кпк}.$$

Критерии:

Максимальный балл – 4.

Запись исходной формулы Погсона и/или выражение для расстояния до звезды d – 2 б.

Вычисление расстояния в пк – 2 б.

4. Оцените скорость изменения блеска (в звёздных величинах за сутки) на этапе подъёма от минимума к максимуму

Минимум: фаза $\varphi_{min} \approx 0{,}7$.

Максимум: фаза $\varphi_{max} = 1{,}0$ (или 0,0 следующего цикла).

Интервал подъёма в долях периода:

$$\Delta\varphi = 1{,}0 - 0{,}7 = 0{,}3.$$

Период $P = 4{,}88$ суток, поэтому время подъёма:

$$\Delta t = 0{,}3 \cdot 4{,}88 \approx 1{,}46 \text{ сут.}$$

Изменение блеска на подъёме:

$$\Delta m = m_{min} - m_{max} \approx 0{,}6^{m}.$$

Скорость изменения блеска:

$$\Delta m / \Delta t = 0{,}6 / 1{,}46 \approx 0{,}041^{m}/\text{сут}.$$

Критерии:
Максимальный балл – 3.
Определение интервала подъёма в долях периода Δφ – 1 б.
Расчет времени подъема в сут. – 1 б.
Вычисление скорости изменения блеска – 1 б.

5. Оцените радиус звезды в максимуме блеска. Для упрощения принять, что её эффективная температура равна 6000 К. Сравните с радиусом Солнца. Принять $M_\odot = 4{,}8^{m}$, $T_\odot$=6000 К.

По закону Стефана-Больцмана:

$$\frac{R}{R_\odot} = \sqrt{\frac{L}{L_\odot}} \cdot \left(\frac{T_\odot}{T}\right)^2.$$

Отношение светимостей можно получить из формулы Погсона

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{0{,}4(M_\odot - M)} = 10^{0{,}4(4{,}8-(-2{,}7))} = 10^{0{,}4 \cdot 7{,}5} = 10^3 = 1000.$$

При $T=T_\odot$=6000 К:

$$\frac{R}{R_\odot} = \sqrt{1000} \approx 31{,}6.$$

Критерии:
Максимальный балл –4.
Запись закона Стефана-Больцмана – 1 б.
Вычисление отношения светимостей (формула + расчет) – 2 б.
Оценка радиуса звезды по отношению к радиусу Солнца – 1 б.

Задание 5.

Двойные звёзды

Визуально-двойная звезда состоит из двух компонентов, обращающихся вокруг общего центра масс по круговым орбитам. Период обращения системы 50 лет. Угловой размер большой полуоси относительной орбиты (расстояние между компонентами) составляет 2,0″. Годичный параллакс системы равен 0,05″. Отношение масс компонентов M_1:M_2 = 1:2.

Общий балл за задачу – 16.

1. Найдите расстояние до системы в парсеках. **(3 балла)**
2. Определите линейную большую полуось относительной орбиты в астрономических единицах. **(4 балла)**
3. Вычислите суммарную массу системы в массах Солнца. **(5 баллов)**
4. Найдите массы каждого компонента. **(4 балла)**

Решение

1. Найдите расстояние до системы в парсеках.

Годичный параллакс π связан с расстоянием d формулой:

$$d = \frac{1}{\pi},$$

где π выражен в угловых секундах, а d – в парсеках.

$$d = \frac{1}{0{,}05} = 20 \text{ пк}.$$

Критерии:

Максимальный балл – 3

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет расстояния – 1 балла.

2. Определите линейную большую полуось относительной орбиты в астрономических единицах.

Угловой размер a''=2,0″. Переход к линейному размеру в а.е.:

$$a = a'' \cdot d,$$

$$a = 40 \text{ а.е.}$$

Критерии:

Максимальный балл – 4

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет полуоси в а.е. – 2 балла.

3. Вычислите суммарную массу системы в массах Солнца.

Обобщённый третий закон Кеплера:

$$T^2 = \frac{a^3}{M_1 + M_2}, \qquad M_1 + M_2 = \frac{a^3}{T^2}.$$

$$M_1 + M_2 = \frac{40^3}{50^2} = \frac{64\,000}{2\,500} = 25{,}6.$$

Подставленные величины:

Период обращения (T) – в годах, a – в а.е., массы – в массах Солнца.

Критерии:

Максимальный балл – 5

Запись исходной формулы – 3 балла.

Верный расчет суммарной массы – 2 балла.

4. Найдите массы каждого компонента.

Отношение масс компонентов M_1:M_2 = 1:2.

Пусть $M_1 = x$, $M_2 = y$.

$$x + 2x = 3x = 25{,}6 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{25{,}6}{3} \approx 8{,}53.$$

$$M_1 \approx 8{,}53\, M_\odot, \qquad M_2 \approx 2 \cdot 8{,}53 \approx 17{,}07\, M_\odot.$$

Критерии:

Максимальный балл – 4

Запись исходной формулы – 2 балла.

Верный расчет масс – 2 балла.

Задание 6.

Красное смещение и закон Хаббла

В спектре галактики линия H_α с лабораторной длиной волны λ_0=656,3 нм наблюдается на длине волны λ=689,1. Постоянная Хаббла H_0=70 км/(с·Мпк).

Общий балл за задачу – 20.

1. Вычислите красное смещение. **(2 балла)**
2. Найдите скорость удаления галактики, используя классическую формулу $v = cz$. **(1 балл)**
3. Вычислите скорость удаления галактики по релятивистской формуле:

$$v = c\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$$

Сравните с результатом пункта 2. Объясните различие. **(6 баллов)**

4. Определите расстояние до галактики по закону Хаббла, используя релятивистскую скорость. **(2 балла)**
5. Оцените возраст Вселенной в модели плоской Вселенной, заполненной только материей (пылью). В такой модели возраст $T=2/3H_0$. Сравните с возрастом, полученным по формуле $T=1/H_0$. Какой результат ближе к современным оценкам? **(3 балла)**
6. Определите, при каком красном смещении релятивистская скорость удаления галактики станет равной 0,5c. Найдите расстояние до галактики в этот момент, используя закон Хаббла с релятивистской скоростью. **(4 балла)**

Решение

1. Вычислите красное смещение.

$$z = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{689{,}1 - 656{,}3}{656{,}3} = \frac{32{,}8}{656{,}3} \approx 0{,}05.$$

Критерии:

Максимальный балл – 2

Запись исходной формулы – 1 балла.

Вычисление красного смещения – 1 балл.

2. Найдите скорость удаления галактики, используя классическую формулу *v* = cz.

$$v_{\text{кл}} = cz = 3 \cdot 10^5 \cdot 0{,}05 = 15\,000 \text{ км/с}.$$

Критерии:
Максимальный балл – 1.

3. Вычислите скорость удаления галактики по релятивистской формуле:

$$v = c\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1}.$$

Сравните с результатом пункта 2. Объясните различие.

$$v_{\text{рел}} = c\frac{(1+z)^2 - 1}{(1+z)^2 + 1} = 3 \cdot 10^5 \cdot \frac{1{,}05^2 - 1}{1{,}05^2 + 1}$$

$$v_{\text{рел}} \approx 14\,625 \text{ км/с}.$$

Различие с классической формулой составляет ≈375 км/с (около 2,5%). При малых *z* различие мало.

Объяснение. Релятивистская формула учитывает эффекты теории относительности. При z=0,05 скорость удаления составляет всего 5% от скорости света, поэтому релятивистские поправки ещё малы и дают отличие всего на 2,5%. С ростом z различие будет увеличиваться, и пользоваться классической формулой станет нельзя.

Возможен вариант преобразования исходной формулы:

$$v_{\text{рел}} = c\frac{(1+2z+z^2) - 1}{(1+2z+z^2) + 1} = c\frac{2z + z^2}{2 + 2z + z^2}.$$

$$v_{\text{рел}} = c\frac{z + z^2/2}{1 + z + z^2/2}.$$

$$z \ll 1$$

$\frac{1}{1+u} \approx 1 - u + u^2 - \ldots$, где $u = z + z^2/2$:

$$v_{\text{рел}} \approx c\left(z + \frac{z^2}{2}\right)\left(1 - z - \frac{z^2}{2} + z^2 + \ldots\right)$$

$$v_{\text{рел}} \approx cz\left(1 - \frac{z}{2}\right).$$

Критерии:
Максимальный балл – 6

Вычисление скорости удаления галактики по релятивистской формуле – 2 балла.

Вычисление разницы с классической формулой (2,5 %) – 1 балл.

Текстовое пояснение: при малых z различие небольшое и с ростом z увеличивается, и пользоваться классической формулой будет нельзя – 1 балл.

Преобразование формулы – 2 балла.

4. Определите расстояние до галактики по закону Хаббла, используя релятивистскую скорость.

$$v = H_0 \cdot r$$

$$r = \frac{v_{\text{рел}}}{H_0} = \frac{14\,625}{70} \approx 208{,}9 \text{ Мпк}.$$

Критерии:

Максимальный балл – 2

Запись исходной формулы – 1 балла.

Вычисление расстояния до галактики – 1 балл.

5. Оцените возраст Вселенной в модели плоской Вселенной, заполненной только материей (пылью). В такой модели возраст $T=2/3H_0$. Сравните с возрастом, полученным по формуле $T=1/H_0$. Какой результат ближе к современным оценкам?

По формуле $T=1/H_0$

$$H_0 = 70 \text{ км}/(\text{с}\cdot\text{Мпк}) = \frac{70}{3{,}09 \cdot 10^{19}} \approx 2{,}265 \cdot 10^{-18} \text{ с}^{-1}.$$

$$T = \frac{1}{2{,}265 \cdot 10^{-18}} \approx 4{,}415 \cdot 10^{17} \text{ с} \approx 14 \text{ млрд лет}.$$

По формуле $T=2/3H_0$ (в модели плоской Вселенной, заполненной материей)

$$T = \frac{2}{3H_0} = \frac{2}{3} \cdot 14 \approx 9{,}3 \text{ млрд лет}.$$

Сравнение. Современные оценки возраста Вселенной (≈13,8 млрд лет) ближе к значению $1/H_0$, так как в реальной Вселенной присутствует тёмная энергия, увеличивающая возраст по сравнению с чисто материальной моделью.

Критерии:

Максимальный балл – 4

Вычисление по формуле $T=1/H_0$ – 2 балла.

Вычисление по формуле $T=2/3H_0$ – 1 балл.

Сравнение – 1 балл.

6. Определите, при каком красном смещении релятивистская скорость удаления галактики станет равной 0,5c. Найдите расстояние до галактики в этот момент, используя закон Хаббла с релятивистской скоростью.

$$0{,}5c = c\frac{(1+z)^2-1}{(1+z)^2+1}.$$

Обозначим:

$$x = (1+z)^2.$$

$$0{,}5 = \frac{x-1}{x+1}$$

$$0{,}5(x+1) = x-1$$

$$1{,}5 = 0{,}5x$$

$$x = 3.$$

$$(1+z)^2 = 3$$

$$1+z = \sqrt{3}$$

$$z \approx 0{,}732.$$

Расстояние до галактики в этот момент:

$$r = \frac{v}{H_0} = \frac{0{,}5 \cdot 3 \cdot 10^5}{70} \approx 2{,}14 \text{ Гпк}.$$

Критерии:

Максимальный балл – 4

Вычисление красного смещения – 3 балла.

Вычисление расстояния – 1 балл.